TD n°5 : Probabilités sur un univers fini

Exercice 1. Propriétés

Soient A, B et C trois événements. Ecrire à l'aide d'union, intersection et contraire :

1. A, B, C se réalisent simultanément.
2. Au moins un des trois événements se réalise.
3. Parmi A, B, C, seul C se réalise.
4. Aucun des trois événements ne se réalise.
5. A ou B se réalisent mais pas ensemble.
6. Exactement un de ces trois événements se réalise.
7. Exactement deux de ces trois événements se réalisent.
8. Pas plus de deux se réalisent.

Exercice 2. Construction d'une probabilité

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de x peut-on définir une probabilité $\mathbb{P}$ en posant :
$$\mathbb{P}(\{a\}) = 2x^2, \quad \mathbb{P}(\{b\}) = 3x \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{c\}) = 4x^2 + 2x \quad ?$$
2. Pour quelle(s) valeur(s) de x existe-t-il une probabilité $\mathbb{P}$ telle que
$$\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\{a, c\}) = \frac{x}{2} \quad ?$$
Combien valent alors $\mathbb{P}(\{b\})$ et $\mathbb{P}(\{c\})$?

Exercice 3. Dé truqué

On lance un dé cubique truqué. On sait que les faces 1, 2, 3 et 4 ont la même probabilité de sortir mais que le 5 est obtenu deux fois plus souvent que le 1 et que le 6 est obtenu quatre fois plus souvent que 1. Retrouver la probabilité de chacune des faces. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ? impair ?

Exercice 4. Jeu de tarot

Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts numérotés de 1 à 21. On prend cinq atouts au hasard. Calculer la probabilité qu'une main contienne :

1. Le 1 ou le 21.
2. Au moins un multiple de 5.

Exercice 5. Histoire de poissons

Un aquarium contient 4 poissons rouges et n poissons noirs ($n \geq 1$). On extrait successivement au hasard et sans remise deux poissons de cet aquarium.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 poissons rouges ? 2 poissons noirs ? 2 couleurs différentes ?
2. Combien doit valoir n pour que l'on ait un maximum de chances d'obtenir 2 couleurs différentes ?

Exercice 6. Texas hold'em

Le poker se joue avec un jeu de 52 cartes. Vous avez en main : As de ♣ et Roi de ♣, on révèle 3 cartes (le Flop) :

2 de ♣, 6 de ♣ et 7 de ♡.

On révélera ensuite successivement 2 autres cartes. A l'aide de ces 7 cartes (les 5 révélées et vos 2 cartes), vous devez former la meilleure main de 5 cartes.

1. A ce stade de la partie, calculer la probabilité à l'aide des deux cartes restantes d'améliorer votre main (dans notre exemple, obtenir une couleur ou une paire d'As ou une paire de Rois).
2. De manière générale, si au stade du Flop, vous avez n cartes permettant d'améliorer votre main, quelle est la probabilité d'en obtenir au moins une après la révélation des deux dernières cartes ?

Exercice 7. Vaccination

Un quart de la population d'un pays a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte 10% de malades. Parmi les malades, 80% ne sont pas vaccinés.

1. Calculer la probabilité qu'une personne prise au hasard dans la population soit malade.
2. En déduire la probabilité qu'une personne tombe malade si elle n'a pas été vaccinée.

Exercice 8. Problème d'assurance

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R1, R2 et R3 : les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques. Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R1, 50% pour la classe R2, et 30% pour la classe R3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si une personne n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 9. Pièces défectueuses

Dans la production d'une entreprise, deux défauts peuvent apparaître de façon indépendante :
Le défaut α apparaît sur 4% des produits. Le défaut β apparaît sur 2% des produits. On prend une pièce au hasard dans la production. On note les événements
A "la pièce possède le défaut α",
B "la pièce possède le défaut β".

1. Quelle est la probabilité que la pièce possède les deux défauts ?
2. Quelle la probabilité que la pièce soit défectueuse.
3. Quelle est la probabilité que la pièce possède exactement un défaut.
4. Sachant que la pièce est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle présente les deux défauts ?

Exercice 10. Indépendance ?

On lance deux fois un dé cubique bien équilibré. On considère les événements :
E : "la somme des lancers vaut 6",
F : "la somme des lancers vaut 7",
G : "le premier lancer est un 4".

1. Etudier l'indépendance de E et de G.
2. Etudier l'indépendance de F et de G.

Exercice 11. Vacances

Chaque jour de ses vacances, un enfant peut choisir de jouer au football, ou de jouer au tennis.

- Le premier jour il choisit au hasard l'une des deux activités.
- Si le n-ème jour il a joué au foot, alors le $(n+1)$-ème jour il joue au foot avec probabilité $0,2$.
- Si le n-ème jour il a joué au tennis, alors le $(n+1)$-ème jour il joue au foot avec probabilité $0,4$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit les notations suivantes :

- F_n l'événement : "Le n-ème jour l'enfant joue au foot", et
$$u_n = \mathbb{P}(F_n).$$
- T_n l'événement : "Le n-ème jour l'enfant joue au tennis", et
$$v_n = \mathbb{P}(T_n).$$

1. Grâce à la formule des probabilités totales, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.
2. Exprimer u_{n+1} uniquement en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
3. En déduire son terme général, et étudier sa convergence.
4. En déduire le terme général, puis la convergence de (v_n).

Exercice 12. Lancers de pièce

On considère une pièce de monnaie telle qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir "Face" est égale à $\dfrac{2}{3}$.
On lance cette pièce plusieurs fois de suite. Les résultats des lancers sont supposés indépendants les uns des autres. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note les événements
F_i "le i-ème lancer donne Face",
P_i "le i-ème lancer donne Pile".
Si on obtient "Face" deux fois de suite, on dit qu'on a obtenu un doublé. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement A_n "on effectue $n+1$ lancers et on obtient un doublé pour la première fois aux deux derniers lancers".
On note p_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n.$$
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$p_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}.$$